(Séquence 3.1

Récursion sur entiers naturels

Définition récursive : factorielle

Spécification **informelle** de la factorielle :
$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$

Définition récursive : factorielle

Spécification **informelle** de la factorielle :
$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$

Définition ambigüe : a-t-on $3! = 1 * 2 * 3 * 3$?

Définition récursive : factorielle

Spécification **informelle** de la factorielle :
$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$

Définition ambigüe : a-t-on $3! = 1 * 2 * 3 * 3$?

Définition **récursive** de factorielle n :

$$\begin{array}{lclcl} n! & = & 1 & \text{pour} & n = 0 \\ n! & = & n * (n-1)! & \text{pour} & n \geq 1 \end{array}$$

Définition récursive : puissance

Spécification **informelle** de la puissance :
$x^n = x * x * x * \ldots * x$

Définition récursive : puissance

Spécification **informelle** de la puissance :
$x^n = x * x * x * \ldots * x$

Définition **récursive** de x puissance n :

$$
\begin{array}{lcll}
x^0 & = & 1 & \\
x^n & = & x * x^{n-1} & \text{pour} \quad n \geq 1
\end{array}
$$

Principes

- **Décomposition** : $f(n) = \ldots f(p) \ldots$
  Exprimer $f(n)$ en fonction de $f(p)$ avec **p<n**
- **Cas de base** : $f(0) = \ldots$
  Donner la(les) valeur(s) de f pour la(les) valeur(s) de base

Principes

- **Décomposition** : $f(n) = \ldots f(p) \ldots$
  Exprimer $f(n)$ en fonction de $f(p)$ avec **p<n**
- **Cas de base** : $f(0) = \ldots$
  Donner la(les) valeur(s) de f pour la(les) valeur(s) de base

Fonctionne car les entiers naturels forment un « domaine bien fondé » où il ne peut y avoir de suite infiniment décroissante.

Définition en 3 cas

Une autre définition de la puissance en trois cas :

$$
\begin{array}{rcll}
x^0 & = & 1 & \\
x^{2n} & = & (x^n)^2 & \text{pour} \quad n \geq 1 \\
x^{2n+1} & = & x * (x^n)^2 & \text{pour} \quad n \geq 1
\end{array}
$$

Double récursion

Les nombres de Fibonacci sont définis par une double récursion :

$$\begin{aligned} fib(0) &= 1 \\ fib(1) &= 1 \\ fib(n) &= fib(n-1) + fib(n-2) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

Récursion enveloppée

La fonction 91 de McCarthy :

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n - 10 && \text{pour} && n > 100 \\
f(n) &= f(f(n+11)) && \text{pour} && n \leq 100
\end{aligned}
$$

En Scheme

- Définition (courante) d'une fonction récursive sur entier naturel (c'est-à-dire les nombres 0, 1, 2, etc.) :

```
(define (f n)
  (if (> n 0)
        expression fonction de f(n − 1)
        cas de base
  ))
```

- Évaluation de la factorielle

```
(f 3) ≡ (* 3 (f 2)) ≡ (* 3 (* 2 (f 1)))
≡ (* 3 (* 2 (* 1 (f 0))))
≡ (* 3 (* 2 (* 1 1)))
≡ (* 3 (* 2 1))
≡ (* 3 2)
≡ 6
```

`(f 0)` ***cas de base: arrêt des appels récursifs***

Fin séquence)