

(Séquence 3.5

Récurrance et récursion



Récurrance et récursion

- ▶ Qu'est-ce que le principe de récurrance ?
- ▶ Comparaison avec la récursion



Récurrance

- ▶ La récurrence (ou principe d'induction) est une technique de preuve mathématique sur l'ensemble des entiers naturels.
- ▶ Les entiers naturels ont deux constructeurs 0 et successeur. Par convention $\text{successeur}(0) = 1$, $\text{successeur}(1) = 2$, etc.
- ▶ Dans ce monde, comment prouver que

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Exemples sur des petits nombres

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^2 i = 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$



Induction

Supposons que la formule soit vraie jusqu'à n alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

QED



Réursion

- ▶ Que vaut $\sum_{i=1}^n i$?
- ▶ Décomposition récursive :

$$\sum_{i=1}^1 i = 1$$

$$\forall n > 0, \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^n i$$



Réursion en Scheme

```
;;; somme: nat -> nat
;;; (somme n) calcule la somme des entiers naturels
;;; de 1 à n
(define (somme n)
  (if (> n 1)
    (+ n (somme (- n 1)))
    n ) )
```

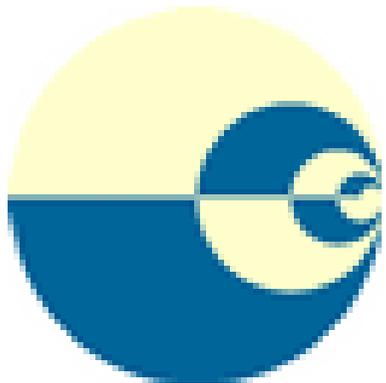
Coût linéaire (en nombre d'additions).



Récurrance et récursion

- ▶ Preuve d'une formule
- ▶ par induction à partir des cas de base
- ▶ Ne calcule pas!
- ▶ Calcul de valeurs
- ▶ par décomposition en problèmes plus simples et de même nature
- ▶ Ne trouve pas la formule!
- ▶ Pas toujours de formule!
Quelle serait celle correspondant à $\sum_{i=1}^n \log^3(i)$?
- ▶ Mais la formule est bien plus efficace!





Fin séquence)

